הרצאה מספר 15
אלגברה 1 מ 104016

הנושא: מרחבים וקטורים
צירופים לינארים ומרחב נפרש

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.9 תת־מרחב: חיתוך ואיחוד

- **<u>משפט:</u>**

יהיו U, W תתי־מרחב של מרחב וקטורי V (מעל השדה F).
אזי החיתוך $U \cap W$ הוא גם תת־מרחב.

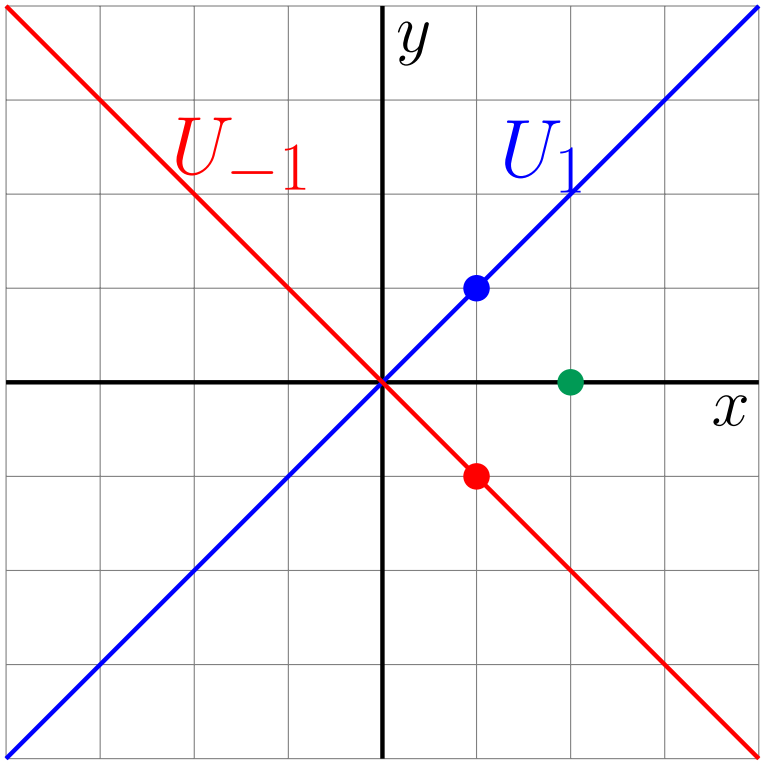
©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.9 תת־מרחב: חיתוך ואיחוד

- **טענה:** האיחוד של שני תתי־מרחב לא חייבת להיות תת־מרחב.

- **דוגמה:**

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{R}^2 \\ U_1 &= \{(x,\ \ x)\ :\ x \in \mathbb{R}\} \\ U_{-1} &= \{(x,-x)\ :\ x \in \mathbb{R}\} \\ W &= U_1 \cup U_{-1} \end{aligned}$$



- $(1,\ \ 1) \in U_1 \subseteq W$
- $(1,-1) \in U_{-1} \subseteq W$
- $(1,1)+(1,-1)=(2,0) \notin W$

לכן W אינו תת־מרחב של V.

- במקרה הכללי, אם $\left\{ \begin{array}{ll} u_1 \in U_1, & u_1 \notin U_2, \\ u_2 \in U_2, & u_2 \notin U_1 \end{array} \right\}$

אז $u_1 + u_2 \notin (U_1 \cup U_2)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.10 צירופים ליניארים ומרחב נפרש

- <u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.
$u \in V$ נקראת **צירוף ליניארי של $v_1, \ldots, v_n$**
$\left(u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right)$
אם קיימים סקלרים α_i כך ש־ $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. $\Uparrow$

- דוגמא: יהי $V = \mathbb{R}^3$ (המרחב הממשי). ויהיו
$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0)$.

1. הוקטור $(3,4,0)$ הוא צ"ל של e_1, e_2 כי $(3,4,0) = 3e_1 + 4e_2$.
2. הוקטור $(3,4,5)$ אינו צ"ל של e_1, e_2 כי בעזרת e_1, e_2 אין אפשרות לקבל 5 ברכיב השלישי, כפי שנדרש.

- נלמד בעתיד טכניקה להכריע את השאלה: האם u הוא צירוף ליניארי של $v_1, \ldots, v_n$?

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.10 צירופים ליניארים ומרחב נפרש

- <u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.

המרחב הנפרש על ידי $v_1, \ldots, v_n$ הוא הקבוצה

$$\mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \ : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\right\}$$

- דוגמא: יהי $V = \mathbb{R}^3$ (המרחב הממשי). ויהיו
$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$.

1. $\mathrm{Span}\left(\{e_2\}\right) = \{(0,y,0) \ : \ y \in F\}$.
2. $\mathrm{Span}\left(\{e_1, e_3\}\right) = \{(x,0,z) \ : \ x,z \in F\}$.
3. $\mathrm{Span}\left(\{e_1, e_2+e_3\}\right) = \{(x,y,y) \ : \ x,y \in F\}$.
4. $\mathrm{Span}\left(\{e_1-e_2, e_2+e_3\}\right) = \{(x,z-x,z) \ : \ x,z \in F\}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.10 צירופים ליניארים ומרחב נפרש

- <u>משפט:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.

S המרחב הנפרש על ידי $v_1, \ldots, v_n$ הוא תת־מרחב של V.

- <u>הוכחה:</u> ניקח $\alpha_i = 0$ לכל i ונקבל $\vec{0} \in \mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} 0 v_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{0} = \vec{0}$$

<u>$n = 0$:</u> הסכום הוא $\vec{0}$. סכום ריק שווה תמיד לאפס.

- נבדוק סגירות לצ"ל של שני צירופים לינארים:

$$\alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i v_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i v_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha \gamma_i + \beta \delta_i \right) v_i \in S$$

- לכן, על פי משפט האפיון 2, S הוא תת־מרחב של V. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.10 צירופים ליניארים ומרחב נפרש

- **דוגמה:** יהי $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות הריבועיות הממשיות מסדר 2.

יהיו $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- **האיבר הכללי של** $\mathrm{Span}\left(\{A, B\}\right)$ **הוא:**

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha - \beta \\ -3\alpha + 3\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha - \beta \\ 3(\beta - \alpha) & \beta \end{pmatrix}$$

- **מטריצה** $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **שייכת ל־** $\mathrm{Span}\left(\{A, B\}\right)$ **אם ורק אם:**

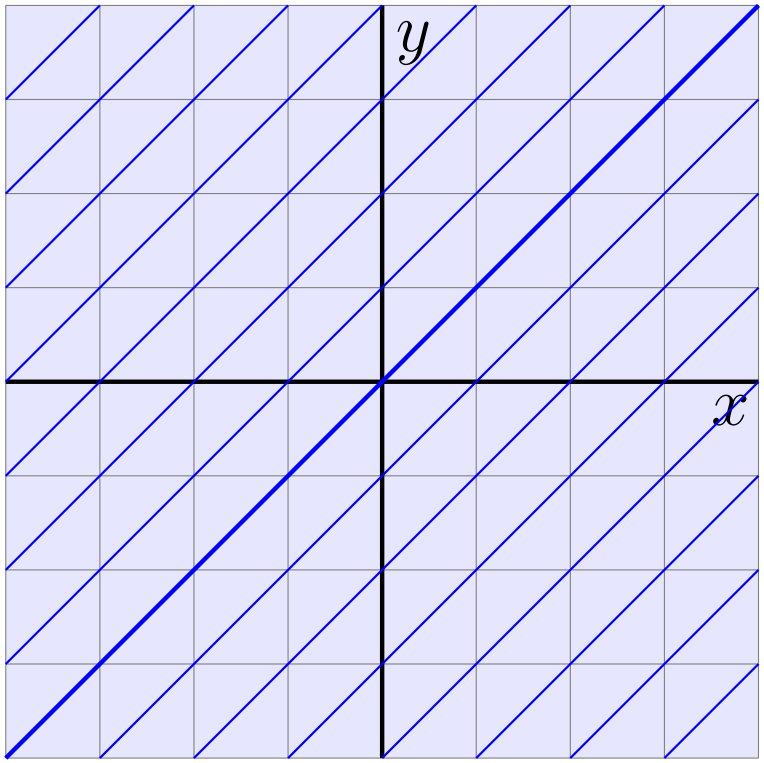
$$\begin{cases} b &= 2a - d \\ c &= 3(d - a) \end{cases} \qquad \begin{cases} a &= \alpha \\ d &= \beta \end{cases}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.11 מרחב נפרש: הסבר גיאומטרי

- <u>הגדרה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.
המרחב הנפרש על ידי $v_1, \ldots, v_n$ היא הקבוצה $\mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$

- דוגמה: יהיו $v_2 = (0,1)$ $v_1 = (1,1)$, $n = 2$, $V = \mathbb{R}^2$.



- קודם נצייר את $\mathrm{Span}(\{v_1\})$.
- עכשיו נוסיף את הצירופים הלינארים מהצורה $\alpha v_1 \pm v_2$.
- ועכשיו את הצירופים הלינארים מהצורה $\alpha v_1 \pm k v_2$ עבור $k \in \mathbb{N}$
- הוספת הצירופים הלינארים מהצורה $\alpha v_1 + \beta v_2$ עבור $\beta \in \mathbb{R}$ ימלא את כל המישור בכחול.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

- <u>שאלה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
  יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.
  בהינתן וקטור $u \in V$ האם $u \in \mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$?

- דוגמה: יהיו $V = \mathbb{R}^4$, $n = 3$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

- דוגמה: יהיו $V = \mathbb{R}^4$, $n = 3$,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \; u = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- כדי לענות על השאלה בדוגמה, צריך לחפש $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ כך שיתקיים:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = u$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

- כדי לענות על השאלה בדוגמה, צריך לחפש $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ כך שיתקיים:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = u$$

- מכל איבר (שורה) נקבל משוואה:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\ 3\alpha - \beta + 4\gamma = 7 \\ \alpha + 3\beta = -1 \\ \alpha + 8\beta - 2\gamma = -6 \end{cases}$$

- קיבלנו מערכת משוואות לינאריות
- מלבד ההחלפה של שמות המתשנים $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$ מדובר בדוגמה א' של מערכות משוואות. הפתרון בכללי: $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, 0) + c(-6, 2, 5)$.
- יש פתרון, ולכן $u \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

- <u>שאלה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
  יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.
  בהינתן וקטור $u \in V$ האם $u \in \mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$?

- **דוגמה:** יהיו $V = \mathbb{R}_3[x]$, $n = 3$,

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
p_1(x) & = & 2x^3 & + & 3x^2 & + & x & + & 1 \\
p_2(x) & = & x^3 & - & x^2 & + & 3x & + & 8 \\
p_3(x) & = & 2x^3 & + & 4x^2 & + & x & - & 2 \\
q(x) & = & 3x^3 & + & 7x^2 & - & x & + & 6
\end{array}
$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

- דוגמה: יהיו $V = \mathbb{R}_3[x]$, $n = 3$,

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} p_1(x) & = & 2x^3 & + & 3x^2 & + & x & + & 1 \\ p_2(x) & = & x^3 & - & x^2 & + & 3x & + & 8 \\ p_3(x) & = & 2x^3 & + & 4x^2 & + & x & - & 2 \\ q(x) & = & 3x^3 & + & 7x^2 & - & x & + & 6 \end{array}$$

- **כדי לענות על השאלה בדוגמה, צריך לחפש $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ כך שיתקיים:**

$$\begin{aligned} q(x) &= \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) + \gamma p_3(x) \\ &= (2\alpha + \beta + 2\gamma)x^3 \\ &\quad + (3\alpha - \beta + 4\gamma)x^2 \\ &\quad + (\alpha + 3\beta + \gamma)x \\ &\quad + (\alpha + 8\beta - 2\gamma) \\ &= 3x^3 + 7x^2 - x + 6 \end{aligned}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

$$
\begin{aligned}
3x^3+7x^2-x+6 = \quad & (\ 2\alpha + \beta + 2\gamma\ )x^3 \\
+(\ & 3\alpha - \beta + 4\gamma\ )x^2 \\
+(\ & \alpha + 3\beta + \gamma\ )x \\
+(\ & \alpha + 8\beta - 2\gamma\ )
\end{aligned}
$$

- לכל חזקה של x בפולינום נשווה מקדמים ונקבל משוואה:

$$
\begin{cases}
2\alpha + \beta + 2\gamma = 3 \\
3\alpha - \beta + 4\gamma = 7 \\
\alpha + 3\beta + \gamma = -1 \\
\alpha + 8\beta - 2\gamma = 6
\end{cases}
$$

- קיבלנו מערכת משוואות לינאריות
- מלבד ההחלפה של שמות המתשנים $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ מדובר בדוגמה ה' של מערכות משוואות. למערכת זו אין פתרון.
- לכן $q(x) \notin \mathrm{Span}(\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\})$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.12 בדיקה האם וקטור שייך למרחב הנפרש

- <u>שאלה:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
  יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.
  בהינתן וקטור $u \in V$ האם $u \in \mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$?

- <u>שיטת הבדיקה:</u>

1. בונים מערכת משוואות מתאימה.
2. פותרים את מערכת המשוואות.
3. אם אין פתרון, אז $u \notin \mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$.
4. אם יש פתרון, אז $u \in \mathrm{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

4.13 מרחב נפרש הוא מינימלי

- <u>משפט:</u> יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F.
יהיו $v_1, \ldots, v_n \in V$ רשימה (סופית) של וקטורים מ־ V.
יהי W תת מרחב של V כך ש־ $v_i \in W$ לכל $i = 1, 2, \ldots, n$.
אזי $\text{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right) \subseteq W$.

- W סגורה תחת הפעולות, ולכן כל צ״ל של $v_1, \ldots, v_n$ שייכת ל־ W.
לכן, $\text{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$ היא תת־קבוצה של W. $\square$

- <u>מסקנה:</u> $\text{Span}\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$ הוא התת־מרחב הכי קטן שמכיל את כל הוקטורים $v_1, \ldots, v_n$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות